Repräsentanz von Einzelbankdaten aus Bankenpooldaten

www.bankboard.de - kontakt@bankboard.de

13.07.2024

Insbesondere kleinere Banken schließen sich in Kooperationen zusammen, um für Validierungszwecke ausreichend Daten zu erhalten. Die Frage bleibt jedoch, in wie weit die Ausfallmuster einer spezifischen Bank durch den Gesamtpool repräsentiert werden. Der Chi-Quadrat-Anpassungstest ist hierfür ein geeignetes Testverfahren.

Chi-Quadrat-Anpassungstest (vgl. *Angewandte Statistik, 11nd ed.* [43] und [431], p. 421f) prüft, ob die Verteilung der Ausfälle in der spezifischen Bank signifikant von der Verteilung der Ausfälle im Gesamtpool abweicht. Er macht keine Voraussetzung zur Verteilung der Daten im Gesamtpool.

1 Testaufbau

Der Test wird folgendermaßen durchgeführt:

1. **Datenstrukturierung:** Eine Kontingenztabelle wird erstellt. Dabei werden die in der spezifischen Bank beobachteten Ausfälle (B) mit den aus dem Vergleichspool erwarteten Ausfällen (E) verglichen. Dabei ist E pro Ratingklasse

$$E = \frac{\text{Anzahl Ausfälle in Vergleichspool}}{\text{Anzahl Schuldner in Vergleichspool}} \cdot \text{Anzahl Schuldner in spezifischer Bank.}$$

Die Kontingenztabelle hat damit folgendes Aussehen:

Rating	**B**	**E**	**B-E**	**(B-E)^2**	**(B-E)^2/E**
1					
2					
$\vdots$					
k					
				Summe:	

Die Summe $\sum_{i=1}^{k}(B_i - E_i)^2/E_i$ über alle relevanten Ratingklassen ist die **Teststatistik**. Sind im Vergleichspool für eine Ratingklasse keine Ausfälle aufgetreten, wird diese Klasse mit der nächsten Ratingklasse zusammengefasst. Ratingklassen, für die es in der spezifischen Bank keine Schuldner gibt, werden ausgelassen. Die verbleibenden bzw. zusammengefassten Ratingklassen definieren die k Zeilen der Kontingenztabelle.

2. **Hypothesen:** Folgende Hypothesen werden getestet:

   Nullhypothese (H_0): Es gibt keinen Unterschied in der Verteilung der Ausfälle zwischen der spezifischen Bank und dem Gesamtpool – die Ausfallmuster der spezifischen Bank sind repräsentativ für den Gesamtpool.

   Alternative Hypothese (H_a): Es gibt einen signifikanten Unterschied in der Verteilung der Ausfälle zwischen der spezifischen Bank und dem Gesamtpool – die Ausfallmuster der spezifischen Bank sind nicht repräsentativ.

3. **Durchführung des Tests:** Mit der Teststatistik aus der Kontingenztabelle wird der Chi-Quadrat-Test durchgeführt, um zu überprüfen, ob die Unterschiede in den beobachteten Häufigkeiten der Ausfälle zwischen der spezifischen Bank und dem Gesamtpool größer sind, als man zufällig erwarten würde. Hierzu wird die Teststatistik $\tilde{T} = \sum_{i=1}^{k}(B_i - E_i)^2/E_i$ als χ^2-verteilte Zufallsgröße mit $k-1$ Freiheitsgraden betrachtet und der P-Wert über die entsprechende kumulierte Verteilungsfunktion berechnet (P-Wert $= 1 - \chi^2_{k-1}(X \leq \tilde{T})$).

4. **Interpretation:** Ein signifikantes Testergebnis (typischerweise ein P-Wert kleiner als 0,05) würde darauf hinweisen, dass die Verteilung der Ausfälle in der spezifischen Bank signifikant vom Gesamtpool abweicht.

2 Anmerkungen

Datenentfernung: Wenn die Daten der spezifischen Bank bereits im Gesamtpool enthalten sind und einen signifikanten Anteil des Pools ausmachen, könnte dies die Ergebnisse verzerren. Eine Entfernung der Daten der spezifischen Bank aus dem Gesamtpool vor dem Vergleich könnte notwendig sein, um eine unabhängige Bewertung zu gewährleisten.

Datengröße und -verteilung: Die Zuverlässigkeit des Chi-Quadrat-Tests kann durch die Größe der Stichproben und die Verteilung der Daten beeinflusst werden. Insbesondere sollten die erwarteten Häufigkeiten in den Zellen der Kontingenztafel nicht zu klein sein.

Anforderungen an die Stichprobe: Idealerweise sollten die Stichproben als Ganzes nicht zu klein und die der Nullhypothese entsprechenden erwarteten Häufigkeiten E nicht unter 1 liegen ($E > 1$). Sind sie kleiner, so werden sie durch Zusammenlegen von benachbarten Klassen auf das geforderte Niveau erhöht. Dies ist aber nur dann nötig, wenn die Anzahl der Klassen klein ist. Für den Fall $k \approx 9$ und einem nicht zu kleinen Stichprobenumfang $n \approx 40$ dürfen die Erwartungshäufigkeiten in vereinzelten Klassen unter 1 absinken (vgl. *Angewandte Statistik, 11nd ed.* [43], vorletzter Absatz, p. 422).

systematische Fehler: Die Vorzeichen der Differenzen $B - E$ sind zu beachten. Idealerweise sollten $+$ und $-$ sich miteinander abwechseln und keine systematischen Zyklen zeigen (vgl. *Angewandte Statistik, 11nd ed.* [43], letzter Absatz, p. 422).

3 Beispiel

Ausgangspunkt ist folgende Datenlage:

Ratingstufe	**Gesamtpool (GP)**		**Spezifische Bank**		**GP ohne spezif. Bank**	
	Schuldner	Ausfälle	Schuldner	Ausfälle	Schuldner	Ausfälle
1	120	0	10	0	110	0
2	130	0	8	0	122	0
3	100	1	13	0	87	1
4	140	3	22	0	118	3
5	100	7	10	0	90	7
6	110	18	13	1	97	17
7	130	26	8	0	122	26
8	120	34	0	0	120	34

Als Vergleichspool wird der Gesamtpool ohne die spezifischen Bankdaten verwendet. Nachdem in den ersten beiden Ratingklassen keine Ausfälle im Vergleichpool auftraten, werden die ersten 3 Klassen zusammengefasst. Die spezifische Bank hat keine Schuldner in Ratingklasse 8. Diese wird daher nicht betrachtet. Die Kontingenztabelle hat damit folgende Form:

Rating	**B**	**E**	**B-E**	**(B-E)^2**	**(B-E)^2/E**
1-3	0	0.089	-0.089	0.008	0.089
4	0	0.186	-0.186	0.035	0.186
5	0	0.778	-0.778	0.605	0.778
6	1	2.278	-1.278	1.634	0.717
7	0	1.705	-1.705	2.907	1.705
				Summe:	3.475

Dabei wird beispielsweise E für die Ratingklasse 5 folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\text{Anzahl Ausfälle in Vergleichspool}}{\text{Anzahl Schuldner in Vergleichspool}} \cdot \text{Anzahl Schuldner in spezifischer Bank} \\ &= \frac{7}{90} \cdot 10 \\ &= 0.778 \end{aligned}$$

Die Tabelle hat 5 Zeilen. Daher wird die Teststatistik 3.475 mit der χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden verglichen. Es ist

$$\text{P-Wert} = 1 - \chi_4^2(X \leq 3.475) = 0.482.$$

Der P-Wert liegt über einem vorgegebenen $\alpha = 0.05$. Die Aussage H_a, dass es einen signifikanten Unterschied in der Verteilung der Ausfälle zwischen der spezifischen Bank und dem Gesamtpool gibt, kann somit nicht empirisch bestätigt werden, d.h. sie ist statistisch nicht signifikant. Die Nullhypothese wird daher nicht abgelehnt.

Die Vorzeichen von $B - E$ sind alle negativ (vgl. Anmerkungen 2, letzter Absatz). Der Test schließt zwar, dass die Nullhypothese nicht widerlegt werden kann, allerdings liegt die Vermutung nahe, dass die spezifische Bank tendenziell ein leicht besseres Portfolio als der Vergleichspool aufweist.